ХИДРОДИНАМИКА НА ТЪНКИТЕ ТЕЧНИ ФИЛМИ. СКОРОСТ НА ИЗТЪНЯВАНЕ НА ЕДНОСТРАННИТЕ И ДВУСТРАННИТЕ ФИЛМИ ОТ ЕМУЛСИОНЕН ТИП

И. Б. Иванов и Т. Т. Трайков

1. УВОД

Напоследък много изследвания бяха посветени на изучаването на хидродинамичните отнасяния на филмите от емулсионен тип [1—5 и др.]. В повечето от тях експерименталните данни се интерпретират посредством закона на Рейнолдс [6], описващ процеса на изтъняване на течен филм заключен между две твърди плоскопаралелни кръгли пластинки. В [7] обаче бе показано, че законът на Рейнолдс е коректен само за пенни филми, стабилизирани с неразтворими повърхностно активни вещества. Ако повърхностно активното вещество (ПАВ) е разтворимо, повърхностите на филма стават подвижни и скоростта на изтъняването му може да надвиши многократно тази, изчислена от закона на Рейнолдс. Отклоненията са още по-големи при емулсионните филми, особено когато последните са получени в отсъствие на каквито и да било ПАВ*.

Горните съображения показват, че правилната интерпретация на експерименталните данни за кинетичните отнасяния на емулсионните филми изисква употребата на уравнение за скоростта на изтъняване, което отчита движението на повърхностите и на течността в капките. Доколкото ни е известно, досега е направена само една теоретична работа [8] върху говното явление. Авторите на [8] обаче получават решение само за течността във филма, а течението в капките е описано само приблизително чрез въвеждането на някои параметри (v_a, R_d φ_0, φ_1, . . .), които се определят експериментално.

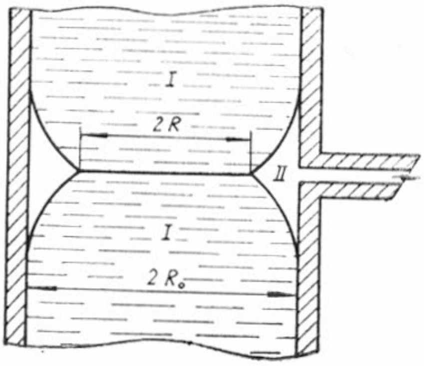
В настоящата работа е направен опит да се даде пълна хидродинамична теория на процеса на изтъняването на емулсионните филми чрез решаване на уравненията на Навие — Стокс както за течността

* Този факт се изтъква в много работи (вж. напр. [1], [2], [4]), посветени на изследването на емулсионните филми, но поради липса на друга възможност и в тях се използва уравнението на Рейнолдс.

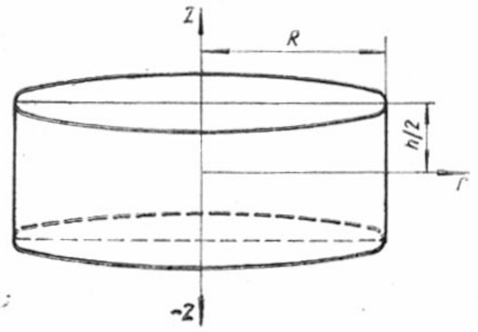
от филма, така и за капките. По този начин можем да изразим скоростта на изтъняване изцяло чрез познати експериментални величини (вж. (40)).

2. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

За да не усложняваме излишно пресмятанията, ще разгледаме системата, показана на фиг. 1: емулсионният филм с дебелина h е обра-



Фиг. 1. Модел на емулсионен филм с радиус R, образуван в капиляра с радиус R_0
I — дисперсна фаза ; II — дисперсна среда



Фиг. 2. Схема на плоскопаралелен кръгъл филм с радиус R и дебелина h

зуван в безкрайно дълга тръбичка с радиус R_0 чрез изсмукване на течност от двойно вдлъбнатия мениксус II. Филмът и мениксусът образуват дисперсната среда. Тръбичката е изпълнена с течността I, която формира дисперсната фаза. Системата не съдържа повърхностно активни вещества. Предполагаме, че филмът е плоскопаралелен* и достатъчно тънък, така че $h/R \ll 1$.

Поради естествената симетрия на задачата ще използуваме цилиндричната координатна система, показана на фиг. 2, и всички пресмятания ще бъдат проведени само за областта $z \geq 0$.

* Филмът в същност има обикновено камбановидна форма (т. нар. „димплинг"). Въпросът за формата на филма е бил изследван в много експериментални и теоретични работи ([10], [11], [12]) и ние няма да се спираме сега на него. При микроскопичните филми с малък диаметър обаче димплингът е малък и филмът може да се приеме за плоскопаралелен.

Течението във филма се подчинява на опростените уравнения на Навие — Стокс (валидни при $h/R \ll 1$), познати от теорията на смазочното действие. Означавайки величините, отнасящи се до филма с индекс „звездичка", можем да напишем тези уравнения във формата ([7], [9])

$$(1) \qquad \text{а)} \quad \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu^*} \frac{\partial p^*}{\partial r}, \qquad \text{б)} \quad \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0,$$

$$\text{в)} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r^*) + \frac{\partial v_z^*}{\partial z} = 0.$$

За течността от дисперсната фаза ще използуваме пълните уравнения на Навие — Стокс

$$\text{а)} \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right],$$

$$(2) \qquad \text{б)} \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right],$$

$$\text{в)} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

в които са изпуснати масовите сили.

В (1) и (2) v_r и v_z са съответните компоненти на скоростта, t е времето, p — налягането, ρ — плътността, а μ и $\nu = \mu/\rho$ са динамичният и кинематичният вискозитети. За да можем да формулираме граничните условия, нека да разгледаме накратко характера на движението на течността в системата.

Поради това, че изтичането на течността от филма привежда в движение течността както в дисперсната фаза, така и в менискуса, пълното хидродинамично описание на разглежданата система е една извънредно сложна задача. Нашата цел обаче е по-скромна — ние търсим само връзката между скоростта на изтъняване на филма и силата, която го предизвиква. В [12] беше изследван процесът на приближаване на два коаксиални менискуса и беше показано, че налягането в течността, заключена между тях, намалява с третата степен на разстоянието между повърхностите на двата менискуса. Ето защо дисипацията на енергия извън една тясна област, разположена непосредствено около оста на симетрия, може да се пренебрегне. Този резултат ни дава основание да приемем, че при разглежданата в настоящата работа система основната част от енергията се дисипира в областта $0 \leq r \leq R$ и да не разглеждаме в подробности движението на течността извън тази област.* Ето защо при решението на (1) и (2) могат да бъдат използувани следните гранични условия:

$$
(3)\qquad
\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{ll}
\text{а)} & v_r^* = v_r = U(r) \\
\text{б)} & v_z^* = v_z = -V/2 \\
\text{в)} & \mu^* \dfrac{\partial v_r^*}{\partial z} = \mu \dfrac{\partial v_r}{\partial z}
\end{array}\right| & \text{при } z = h/2\,, \\
\text{г)}\quad p^* = p_0^* & \text{при } r = R\,, \\
\left.\begin{array}{ll}
\text{д)} & v_r = 0 \\
\text{е)} & p = p_0
\end{array}\right\} & \text{при } z = \infty\,,
\end{array}
$$

където $V = -dh/dt$ е скоростта на изтъняване на филма, U — радиалната скорост на междуфазовата повърхност, p_0 — налягането в дисперсната фаза на голямо разстояние от филма, а p_0^* — налягането на хипотетичен равновесен филм със същата дебелина. Това налягане е свързано с налягането P_m в мениската посредством съотношението

$$(4)\qquad P_0 = P_m + \Pi\,,$$

където Π е разклинящото налягане (вж. напр. [19]). Освен това е необходимо решенията на (1) и (2) да нямат особености при $r = 0$.

Уравненията (3а) и (3б) следват от самата постановка на задачата, а (3в) е условието за непрекъснатост на тангенциалната компонента на тензора на напреженията на фазовата граница. Уравнението (3г) е следствие от допускането, че течността в мениската е неподвижна, а (3д) и (3е) отчитат затихването на радиалното движение на течността в дисперсната фаза при $z \to \infty$ (това не се отнася обаче за скоростната компонента v_z, която дори при $z \to \infty$ има крайна стойност (вж. (13) и фиг. 3).

Решението на (1) е дадено подробно в [7] и [14] и затова ще приведем само крайните изрази за v_r^*, v_z^* и p^*.

$$
(5)\qquad
\begin{array}{ll}
\text{а)} & v_r^* = \dfrac{3}{h^3}(2Uh - Vr)\left(z^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) + U\,, \\[2ex]
\text{б)} & v_z^* = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r(2Uh - Vr)\left(\dfrac{z^3}{h^3} - \dfrac{3}{4}\dfrac{z}{h}\right) + Urz\right], \\[2ex]
\text{в)} & p^* = p_0 + \dfrac{3\mu^* V}{h^3}(R^2 - r^2) + \dfrac{12\mu^*}{h^2}\displaystyle\int_0^R U\,dr\,.
\end{array}
$$

* Това допускане води до известно сходство както в подхода, така и в резултатите, между разглежданата тук задача и решението на Карман за въртене на диск в безкрайна течност (вж. напр. [18]).

Особената симетрия на системата предполага, че изразът за v_r трябва да има формата

$$v_r = U(r)\, f(\eta), \tag{6}$$

където безразмерната координата

$$\eta = (z - h/2) \sqrt{\frac{U}{\nu r}} \tag{7}$$

може по принцип да зависи от r. Неизвестната засега функция $f(\eta)$ ще бъде определена по-нататък. Уравненията (3в), (5) и (6) дават

$$\left(\frac{U}{r}\right)^{3/2} = \frac{3\mu^* \nu^{1/2}}{\mu h a_1} \left(2 \frac{U}{r} - \frac{V}{h}\right), \tag{8}$$

където

$$a_1 = \left(\frac{d f}{d \eta}\right)_{\eta = 0}. \tag{9}$$

Тъй като (8) е алгебрично уравнение относно U/r, можем да напишем

$$U = A r, \tag{10}$$

където A, която не зависи от r и z, е един от корените на (8). Тогава (6) придобива вида

$$v_r = A r f(\eta) \tag{11}$$

и η не зависи от r:

$$\eta = (z - h/2) \sqrt{\frac{A}{\nu}}. \tag{12}$$

Като интегрираме (2в) по z, с помощта на (3б) и (11) получаваме

$$v_r = -2 \sqrt{A \nu} \int_0^{\eta} f(\eta)\, d\eta - \frac{V}{2}. \tag{13}$$

Взимайки пред вид (3г), (11) и (13) от (2б), заключаваме, че p също не зависи от r, т. е. членът $\partial p / \partial r$ в (2а) изчезва. Уравненията (11), (13) и гореспоменатите съображения ни дават възможност да запишем (2) в по-проста форма:

$$\text{а)} \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2},$$

$$\text{(14)} \qquad \text{б)} \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2},$$

в) $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

Тези уравнения ще бъдат решени в следващия раздел.

Необходимо е да подчертаем, че при извода на (14) ние използувахме само (3в), (5) и (6), без да правим каквито и да било други допускания. Затова опростеният вид (14) на уравненията на Навие — Стокс се явява резултат само на употребата на израза (5а) за радиалната компонента на скоростта в тънкия филм.

В следващия раздел ще разгледаме частния случай на стационарно течение в дисперсната фаза, при което производните по t в (14а) и (14б) изчезват. В раздел 6 ще бъде показано, че за да бъде течението стационарно, е необходимо движещата сила да бъде пропорционална на h^{-1}. Случаят на едностранен филм (когато с едната от повърхностите си филмът граничи с течност, а другата е твърда) е разгледан в раздел 4. В раздел 5 ще бъде получено общо решение на задачата за случая на нестационарно течение. Някои от използваните в настоящата работа приближения са анализирани в Приложението.

3. СТАЦИОНАРНО ТЕЧЕНИЕ В ДВУСТРАНЕН ФИЛМ

В този случай производните по t в [14] се анулират. По този начин от (14а) и (13) се получава съотношението

(15) $$f''+2f'\left|\int_0^\eta f(\eta)\,d\eta+\frac{V}{4\sqrt{A\nu}}\right|-f^2=0,$$

което след диференциране по η се трансформира в обикновено диференциално уравнение:

(16) $$f'''f'-f''^2+f''f^2=0.$$

Доколкото при $\eta=0$, $f=1$ (вж. (3а)) и $V/2\sqrt{A\nu}\ll 1$ (вж. (П. 1)), за да бъде (15) валидно, трябва да бъде изпълнено условието $f''(0)=1$. Имайки пред вид също, че f трябва да се анулира, когато $\eta\to\infty$, получаваме следните гранични условия за (16):

(17) а) $f=1$; б) $f'=1$, при $\eta=0$,
в) $f=f'=f''=\ldots=f^{(n)}=\ldots=0$ при $\eta=\infty$.

Решението на (16) може да бъде представено чрез редовете

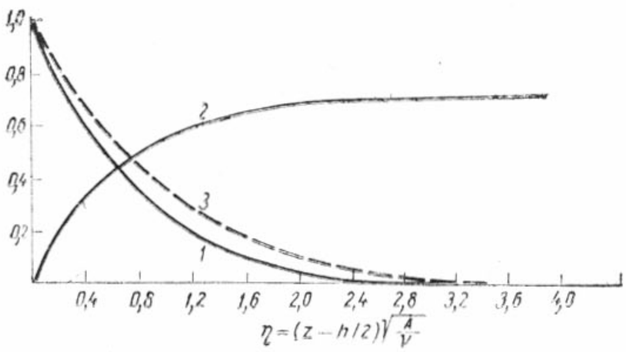
(18) $$f_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\eta^n}{n!}$$

за областта $0\leq\eta\ll 1$ и

(19) $$f_\infty=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-n\beta\eta}$$

за $\eta\ll 1$. Коефициентите α_n, b_n и β се определят посредством заместването на (18) и (19) в (16) и (17) и чрез приравняване на f_0 и f_∞ и на производните им в някаква точка η_0.

Вследствие на тази процедура след изнурителни изчисления получаваме $\eta_0=1$; $\beta=1{,}44$; $a_0=1$; $a_1=-1{,}19$; $a_2=1$; $a_3=0$; $a_4=-2$;



Фиг. 3. Графично представяне на решението на уравнение (16)
Крива 1 — зависимост на функцията от безразмерната координата $\eta=(z-h/2)\sqrt{A/\nu}$; Крива 2 — зависимост на функцията $\int_0^\eta f\,d\eta$ от η; Крива 3 — зависимост на функцията f от η, получена в [14] по метода на Карман — Полхаузен

$a_5=2{,}38$; . . . $b_1=1{,}16$; $b_2=-0{,}324$; $b_3=0{,}0905$; $b_4=0{,}0240$; . . . и т. н.

Пресметнатите по този начин функции f и $\int_0^\eta f\,d\eta$ са показани на фиг. 3 (кривите 1 и 2). Те съвпадат точно с тези, получени чрез машинно интегриране на (16).* На фиг. 4 са показани изчислените въз основа на това решение токови линии.

Изразите (18) и (19) представляват решението на уравненията на Навие — Стокс (14) за дисперсната фаза. Скоростта v_z се пресмята лесно от (13), а налягането p се изчислява чрез интегриране на (14б) с помощта на граничното условие (3е):

(20) $$p=p_0-2\mu A\left[f+\left(\int_0^\eta f d\eta\right)^2-\left(\int_0^\infty f d\eta\right)^2\right].$$

Стойността на V може да се намери от уравнението за баланса на силите, действуващи върху повърхността на филма:

(21) $$\int_0^R p_{zz}\, r dr=\int_0^R p^*_{zz}\, r dr\,,$$

където p_{zz} е нормалната компонента на тензора на напреженията. За разглежданата от нас система $p^*_{zz}\approx -p^*$. Записвайки (8) като (вж. също и (10))

* Решаването на (16) и (37) (вж. раздел 5) на аналогова машина е извършено в Аналогово-изчислителния център при ЦЛТОХТ — БАН.

(22) $$U = A_2 r = \frac{V r}{2h(1+\varepsilon_2)},$$

където

(23) $$\varepsilon_2 = -\frac{a_1}{6}\sqrt{\frac{A_2}{\nu}}\,\frac{\mu h}{\mu^*},$$

и замествайки U от (22) в (5в), получаваме

(24) $$p = p_0^* + \frac{3V\mu^*}{h^3}\,\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon_2}\,(R^2 - r^2).$$

От (21) и (24) с помощта на (4) намираме накрая

(25) $$\frac{V}{V_0} = \frac{1+\varepsilon_2}{\varepsilon_2},$$

където

(26) $$V_0 = \frac{2h^3}{3\mu^* R^2}\,\Delta P$$

е рейнолдсовата скорост на изтъняване на филм, образуван между два твърди, успоредни диска [6], а

(27) $$\Delta P = P_c - \Pi$$

е движещата сила (за единица площ) на процеса ($P_c = p_0 - P_m$ е капилярното налягане). При извода на (25) сме използували приближението $\Delta P \gg \mu A$ (вж. П. 3).

4. СТАЦИОНАРНО ТЕЧЕНИЕ В ЕДНОСТРАНЕН ФИЛМ

Израз за скоростта на изтъняване на едностранен филм (долната повърхност е твърда) се намира по начин, аналогичен на описания по-горе. Трябва да се има пред вид обаче, че граничните условия (3) в този случай важат само за горната повърхност, докато за долната те се заменят с

(28) а) $v_z^* = V/2$; б) $v_r^* = 0$ при $z = -h/2$.

По-долу ще дадем само тези уравнения, които са видоизменени спрямо съответните им от раздел 3:

(29) $$v_r^* = \frac{3}{h^3}(Uh - Vr)\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + U\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right);$$

(30) $$p^* = p_0^* + \frac{3\mu V}{h^3}(R^2 - r^2) + \frac{6\mu^*}{h^2}\int_r^R U\,dr;$$

$$U = A_1 r = \frac{3Vr}{4h(1+\varepsilon_1)}; \tag{31}$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{4+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}, \tag{32}$$

където

$$\varepsilon_1 = -\frac{a_1}{4} \frac{\mu h}{\mu^*} \sqrt{\frac{A_1}{\nu}}. \tag{33}$$

5. НЕСТАЦИОНАРНО ТЕЧЕНИЕ В ДИСПЕРСНАТА ФАЗА

Дадената в раздел 2 обща формулировка на задачата остава валидна и за общия случай на нестационарно течение в дисперсната фаза. Тъй като v_r зависи от t само посредством h, с помощта на (11), (12), (22) и (23) можем да напишем

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial h} \frac{dh}{dt} = -V \frac{\partial v_r}{\partial h} = -r A^2 (2f + \eta f') \varkappa, \tag{34}$$

където

$$\varkappa = \varkappa_2 = \left(1 - \frac{\partial \ln V}{\partial \ln h}\right)(1+\varepsilon_2) + h \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial h} \tag{35}$$

за двустранен филм и

$$\varkappa = \varkappa_1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\partial \ln V}{\partial \ln h}\right)(1+\varepsilon_1) + \frac{2}{3} h \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial h} \tag{36}$$

за едностранен филм. Оттук вместо (16) от (14а) получаваме

$$f''' f' - f''^2 + f'' f^2 + \varkappa (2ff'' - 3f'^2) = 0, \tag{37}$$

а граничното условие (17б) се променя в

$$f'' = 1 + 2\varkappa \qquad \text{при } \eta = 0. \tag{38}$$

Затова f ще зависи не само от η, но също така и от h (чрез $\varkappa$), т. е. $f = f(\eta, h)$.

Провеждайки пресмятания, подобни на тези от предишните раздели, получаваме изрази за V, напълно еднакви с (23) и (35), но в този случай коефициентите $a_1(h)$ зависят вече от h.

Зависимостта $a_1(h) = f'(0, h)$ може да бъде определена от решенията на диференциалното уравнение (39). получени при различни стойности на параметъра $\varkappa$. В таблица 1 са приведени стойностите на a_1, получени чрез числено интегриране на (37).

Таблица 1

$\varkappa$	$-a_1$	B	$\varkappa$	$-a_1$	B
−0,80	0,342	6,49	0,10	1,263	2,72
−0,70	0,486	5,07	0,20	1,341	2,62
−0,60	0,601	4,37	0,30	1,419	2,51
−0,50	0,703	4,02	0,40	1,481	2,44
−0,40	0,802	3,69	0,50	1,540	2,38
−0,30	0,900	3,42	0,60	1,598	2,32
−0,20	0,991	3,18	0,70	1,660	2,27
−0,10	1,082	2,98	0,80	1,722	2,22
0,00	1,189	2,82	0,90	1,771	2,17
			1,00	1,829	2,12
			1,20	1,930	2,07

6. ОБСЪЖДАНЕ

При извода на формулите (25) и (32) за скоростта на изтъняване бяха направени само три допускания: 1) за областта $-h/2 \leq r \leq h/2$ беше използувано приближението на тънкия филм ($h/R \ll 1$), 2) беше прието, че филмът е плоскопаралелен, и 3) беше пренебрегната дисипацията на енергия вследствие движението на течността в областта $r > R$. В случаите, когато тези условия са изпълнени, може да се счита, че е получено практически точно решение на уравненията на Навие — Стокс за дисперсната фаза*. Това заключение не се променя от факта, че при формулировката на граничното условие $f''(0) = 1$, беше пренебрегнат членът $V/2\sqrt{A\nu}$ (същото приближение е използувано и при извода на условието (38)), защото този член може да бъде отчетен при численото интегриране на (37). Аналогични съображения важат и за приближението $\Delta P \ll \mu A$, използувано при извода на (25). Такова усложняване на теорията надали обаче е необходимо, защото тези приближения влияят много слабо върху крайните резултати (вж. Приложението). Горните съображения ни карат да считаме, че уравненията (25) и (32) са приложими както в случая, когато дисперсната фаза е безкрайно вискозна (филмът е заключен между две твърди повърхности), така и в случая, когато нейният вискозитет е нула (дисперсна среда — вакуум). В първия случай ($\mu \to \infty$) ε_1 и ε_2 клонят към безкрайност и уравненията (25) и (32) преминават в закона на Рейнолдс ($V = V_0$). Във втория случай ($\mu \to 0$) ε_1 и ε_2 клонят към нула и (25) дава $V \to \infty$, а (32) преминава в известното уравнение [15] $V = 4\,V_0$ за

* Докато условието 1 се удовлетворява винаги добре, то за да бъде изпълнено условието 2, е необходимо да се вземат специални мерки, защото отклоненията от плоскопаралелната форма при емулсионните филми са обикновено значителни (вж. напр. [2], 10]). Условието 3 вероятно се нарушава при много малките филми, когато размерът на преходната област между филма и менискуса е от порядъка на радиуса на филма, или при много малките капки, при които радиусът на капката е сравним с дебелината на граничния слой (вж. по-долу).

скоростта на изтъняване на филм, граничещ с горната си повърхност с вакуум, а с долната — с твърда подложка. Малкият интервал, в който може да се мени скоростта на изтъняване на филм върху твърда подложка, навежда на мисълта, че в този случай дори нищожни онечиствания от ПАВ вероятно ще понижават скоростта до рейнолдсовата скорост V_0*. За очакване е обаче отклонението от закона на Рейнолдс за двустранни филми да бъде значително (дори в присъствие на ПАВ). Както показват оценките, приведени в приложението, в този случай за почти всички системи, представляващи практически интерес, $\varepsilon_1 \ll 1$, така че с помощта на (22), (23) и (35) уравнението (25) може да бъде записано в по-удобен вид:

(39) $$\frac{V}{V_0} = \frac{3}{2} B(\varkappa_2) \mu^* \left(\frac{R^2}{\mu \rho h^4 \Delta P} \right)^{1/3}$$

или

(40) $$V = B(\varkappa_2) \left(\frac{h^5 \Delta P^2}{\mu \rho R^4} \right)^{1/3},$$

където

(41) $$B(\varkappa_2) = (-4\sqrt{2}/a_1)^{2/3},$$

и

(42) $$\varkappa_2 = 1 - \partial \ln V / \partial \ln h .$$

Последното уравнение следва от (35) при $\varepsilon_2 \ll 1$ и $h(\partial \varepsilon_2 / \partial h) \ll 1$ (вж. (П. 4)). В табл. 1 са приведени някои стойности на коефициента B.

Ако пренебрегнем сравнително слабата зависимост на B от h, от (40) и (42) можем да получим известна представа за това, в какъв интервал ще лежат стойностите на $\varkappa_2$. Ако $\Delta P \sim h^m$, където m е произволно реално число, получаваме

(43) $$\varkappa_2 = 1 - \frac{5 + 2m}{3},$$

т. е. $\varkappa_2$ (а оттам и B) не зависи от h. Ако разклиняващото налягане $\Pi = 0$, ΔP ще зависи само от капилярното налягане P_c (вж. (27)) или от подемната сила, така че $m = 0$. Тогава $\varkappa_2 = -2/3$ и $B = 4{,}98$. При много тънките филми понякога е възможно да се пренебрегне капилярното налягане (или подемната сила) спрямо Π и тогава $\Delta P = -\Pi$. Ако при това важи законът на Хамакер (вж. напр. [19]), то $m = -3$, $\varkappa_2 = 4/3$ и $B = 1{,}91$. Течението ще бъде стационарно при $\varkappa_2 = 0$ ($B = 2{,}82$), което според (43) съответствува на $m = -1$. За по-точни изчисления, както и в случаите, когато връзката между ΔP и h е по-сложна, $\varkappa_2$ трябва да се изчислява от (42) по експериментално измерената зависимост на V от h.

* Аналогичен резултат е бил получен при експерименталната проверка на теорията на Рибчински — Адамар за скоростта на падане на капка в друга течност — оказало се е, че тази скорост практически съвпада с изчислената от закона на Стокс ([16] и [17] — стр. 400).

Заслужава да се отбележи, че нашите резултати могат да бъдат интерпретирани с помощта на теорията на граничния слой на Прандтл (вж. напр. [9], [18]). От крива 1 на фиг. 3 се вижда, че при $\eta \geqq 2{,}5$ функцията $f = v_r/U$ спада практически до нула. Това позволява величината (вж. (12) и (22) при $\varepsilon_2 \ll 1$)

$$\delta = 2{,}5\sqrt{\frac{\nu}{A}} \approx 3{,}5\sqrt{\frac{h\nu}{V}} \tag{44}$$

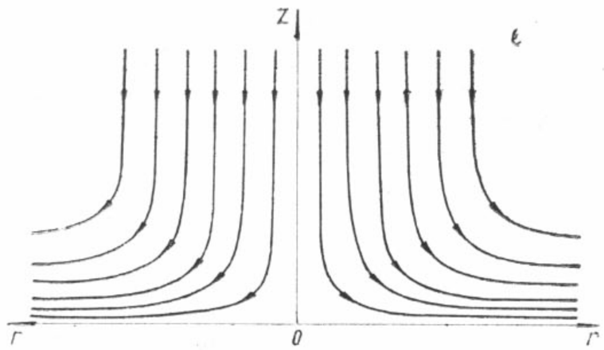
да се разглежда като дебелина на граничен слой, извън който радиалното движение на течността замира. До подобен резултат води и формалното приложение на теорията на Прандтл, според която

$$\delta = \frac{R}{\sqrt{R_e}} = \frac{R}{\sqrt{U_0 R/\nu}} \approx \sqrt{\frac{h\nu}{V^*}}, \tag{45}$$

където Re е критерият на Рейнолдс, а $U_0 = U(R)$. При последната стъпка в (45) е използувано съотношението

$$U_0 = O(VR/h), \tag{46}$$

което следва от (1в). От (13) и крива 2 на фиг. 3 следва, че v_z нараства от $-V/2$ при $\eta = 0$ до постоянната стойност $-(1{,}44\sqrt{A\nu} + V/2)$



Фиг. 4. Токови линии в дисперсната фаза при стационарно течение в двустранен емулсионен филм

при $\eta > 2{,}5$. Това означава, че изтласкването в радиално направление на течността, разположена непосредствено до повърхността на филма, води до „засмукване" на течност от по-отдалечените области на дисперсната фаза. Този извод се потвърждава и от фиг. 4, представяща токовите линии. Както по характера на движението на течността, така и по независимостта на δ от r нашата теория прилича на теорията на Карман [18]. Горните съображения не са достатъчни, за да може да се приложи теорията на Прандтл към разглеждана в настоящата работа задача, защото нашето уравнение (14б) се различава от съответното уравнение $\partial p/\partial z = 0$ на Прандтл. Лесно е да се покаже обаче, че използвансто от нас при извода на (25) приближение $\Delta P \gg \mu A$ е еквивалентно на полагането $\partial p/\partial z = 0$. При това уравненията (14) стават идентични с уравненията на Прандтл и могат да бъдат решени по метода на Карман — Полхаузен (вж. напр. [18]. Получената в [14] по този начин функция $f(\eta)$ за стационарно течение е илюстрирана с крива 3 на фиг. 3, а формулата за скоростта v при $\varepsilon_2 \ll 1$ съвпада с (40), но с $B = 2{,}98$ вместо получената в настоящата работа стойност $B = 2{,}82$.

Трябва да подчертаем обаче, че изтъкнатото по-горе сходство между нашата теория и теорията на Прандтл е чисто формална, защото приближението $\Delta P \gg \mu A$ в никакъв случай не е еквивалентно на условието $Re \gg 1$, което трябва да бъде изпълнено, за да бъде приложима теорията на Прандтл.

В раздел 1 беше вече спомената за теорията на Ленг и Мърдох [8]. Те описват движението на течността в дисперсната фаза посредством два параметъра, които трябва да се подбират във основа на опитните резултати — стойността v_d на радиалната компонента на скоростта на разстояние на R_d от повърхността на филма. Тези автори считат, че е разумно да се приеме $v_d = 0$, което означава, че R_d трябва да съвпада с дебелината δ на граничния слой. Ако положим в тяхното уравнение (38) (вж. [8]) $v_d = 0$, а за R_d използваме нашия резултат (44), ще получим отново (40), но с $B = 5{,}8$ вместо $B = 2{,}82$. Това показва, че двете теории си намират в добро съответствие.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценка на някои приближения

1. $V/\sqrt{A\nu} \ll 1$.

Въз основа на (10), (44) и (46) можем да напишем

$$V/\sqrt{A\nu} \approx \frac{V}{\sqrt{U_0 \nu/R}} \approx \sqrt{\frac{Vh}{\nu}} \approx \frac{h}{\delta}. \tag{II. 1}$$

Тъй като във всички случаи, представляващи практически интерес, $h \leq 10^{-5}$ cm и $\nu \geq 10^{-2}$ cm²/s, за да бъде горното отношение от порядък поне на 0,1, е необходимо скоростта V да придобие абсурдната стойност 10 cm/s. Това показва, че отношението h/δ може да се пренебрегне спрямо членовете, които са от порядък на единица. Горната оценка би могла да се проведе и въз основа на уравненията (31) и (40), при което се достига до същия извод.

2. $\varepsilon_2 \ll 1$.

От (23), (10), (44) и (46) получаваме

$$\varepsilon_2 \approx \frac{\mu h}{\mu^*}\sqrt{\frac{A}{\nu}} \approx \frac{\mu}{\mu^*}\frac{h}{\sqrt{h\nu/V}} \approx \frac{\mu h}{\mu^* \delta}. \tag{II. 2}$$

Тъй като $h/\delta \ll 1$ (вж. (П. 1)), при сравними вискозитети на двете фази може да се приеме, че $\varepsilon_2 \ll 1$. Ако $\mu \gg \mu^*$, това приближение е невалидно и вместо (40) трябва да се използува по-точното уравнение (25). По аналогичен начин се оценява и ε_1.

3. $\mu A/\Delta P \ll 1$.

Уравненията (22) и (40) дават

$$\text{(П. 3)} \qquad \frac{\mu A}{\Delta P} \approx \frac{\mu V}{h \Delta P} \approx \left(\frac{h^2 \mu^2}{\rho R^4 \Delta P}\right)^{1/3}.$$

При експерименталните изследвания на тънките течни филми параметрите, участвуващи в (П. 3), имат обикновено следните стойности: $\rho \approx 1$ g/cm^3, $h \leq 10^{-5}$ cm, $R \geq 10^{-2}$ cm, $\Delta P \geq 100$ dyn/cm^2. От (П. 3) тогава следва, че $\mu A/\Delta P$ ще бъде от порядъка на 0,1, ако $\mu \approx 3$P. Този резултат показва, че в някои случаи е възможно това приближение да не е достатъчно коректно. Тъй като ние го използувахме едва при извода на (25), не представлява никаква трудност то да бъде избягнато, но крайните формули за скоростта на изтъняване V ще се усложнят значително.

4. $h(\partial \varepsilon_2/\partial h) \ll 1$.

Въз основа на (П. 2) имаме

$$\text{(П. 4)} \qquad h \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial h} \approx \varepsilon_2 \ll 1 .$$

Катедра физикохимия

Постъпила на 14. II. 1974 г.

ПО-ВАЖНИ ОЗНАЧЕНИЯ

Величините, означени с индекс (*) се отнасят за течността на тънкия филм, а тези без (*) — за дисперсната фаза или са общи за цялата система:

a_n — безразмерни коефициенти в (18);
A — функцията $U(r)\,r$, s^{-1};
b_n — безразмерни коефициенти в (19);
B — функция на h, дефинирана чрез (41) и (42), безразмерна;
f — v_r^*/U, функция на η, безразмерна;
F — движеща сила, dyn;
h — дебелина на филма, cm;
p, p^* — налягане, dyn/cm^2;
p_{zz}, p_{zz}^* — нормална компонента на тензора на напреженията, dyn/cm^2;
P_c — капилярно налягане, dyn/cm^2;
ΔP — $F/\pi R^2 \approx P_c - \Pi$, dyn/cm^2;
P_m — налягане в менискуса, dyn/cm^2;
p_0 — налягане в дисперсната фаза на безкрайно голямо разстояние от филма, dyn/cm^2;
r — радиална координата в цилиндричната координатна система, cm;
R — радиус на филма, cm;
t — време, s;

U — скорост на течение на междуфазовите повърхности в радиално направление, cm/s;
v_r, v_r^* — радиална компонента на скоростта, cm/s;
v_z, v_z^* — нормална компонента на скоростта, cm/s;
V — (dh/dt), скорост на изтъняване на филма, cm/s;
V_0 — рейнолдсова скорост на изтичане (вж (26)), cm/s;
z — нормална координата в цилиндричната координатна система, cm;
β — безразмерен коефициент в (19);
δ — дебелина на граничния слой в дисперсната фаза, cm;
ε_1, ε_2 — безразмерни функции на h, дефинирани чрез (23) и (33);
η — безразмерна обобщена променлива, $(z-h/2)\sqrt{A/\nu}$;
$\varkappa$ — безразмерна функция на h (вж (35) и (36));
μ, μ^* — динамичен вискозитет, P;
ν, ν^* — кинематичен вискозитет, cm^2/s;
Π — разклинящо налягане, dyn/cm^2;
ρ, ρ^* — плътност, g/cm^3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mac Kay G. D. M., S. G. Mason, Can. J. Chem. Engng., **41**, 203 (1963).
2. Hartland S., Trans. Instn. chem. Engrs., **45**, T 102 (1967).
3. Sonntag H., III Int. Kongr. f. grenzfl. Stoffe, Bd **2**, 601 (1960).
4. Платиканов, Д. Н., Е. Д. Манев, Изв. Инст. физикохимия БАН, **4**, 185 (1964).
5. Sheely G. F., D. E. Leng, Chem. Eng. Sci., **26**, 1867 (1971).
6. Reynolds O., Phil. Trans. Roy. Soc., **A177**, 157 (1886).
7. Radoev B. P., I. B. Ivanov, E. D. Manev, Kolloid — Z., **234**, 1237 (1969).
   Радоев Б. П., Д. Ст. Димитров, И. Б. Иванов, Годишник Соф. унив., Хим. фак., **66**, (1971/72), под печат.
8. Murdoch P. G., D. E. Leng, Chem. Eng. Sci., **26**, 1881 (1971).
9. Кочин Н. Е., И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, Москва, 1963.
10. Hartland S., Chem. Eng. Sci., **24**, 987 (1969).
11. Frankel S. P., K. S. Mysels, J. Phys. Chem., **66**, 190 (1962).
12. Иванов И. Б., Б. П. Радоев, Годишник Соф. унив., Хим. фак., **65**, 441 (1970/71).
13. Иванов И. Б., Б. П. Радоев, Годишник Соф. унив., Хим. фак., **67** (1972/73) под печат.
14. Иванов И. Б., Тр. Т. Трайков, Годишник Соф. унив., Хим. фак., **66** (1971/72), под печат.
15. Шелудко А. Д., Д. Н. Платиканов, Годишник Соф. унив., Хим. фак., **54**, 218 (1959/60).
16. Silvly H., Phys. Rev., **11**, 106 (1916).
17. Левич В. Г., Физикохимическая гидродинамика, Физматгиз, Москва, 1959.
18. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, Изд. иностр. лит., Москва, 1956.
19. Шелудко А. Д., Колоидна химия. Наука и изкуство, София, 1963.

HYDRODYNAMICS OF THIN LIQUID FILMS. RATE OF THINNING OF ONE-SIDED AND TWO-SIDED EMULSION FILMS

by I. B. Ivanov and T. T. Traikov

Summary

A hydrodynamic theory of the process of thinning of one-sided and two-sided microscopic emulsion films is put forward. The theory is essentially based on three assumptions: 1. the film is considered as being thin in the hydrodynamic sense; 2. the film surfaces are assumed to be plane-parallel and 3. the dissipation of energy outside the region $r \leq R$ is neglected.

We were able to solve exactly the complete set ot Navier-Stokes' equations for the dispersion phase without making any other approximations. The case of non-steady flow has been considered as well. Some approximated equations, valid for systems of practical importance, have been obtained. It is shown, that the solution of the same problem, obtained recently by us [14] by means of the method of von Kármán-Pohlhausen, is correct. The relation between our theory and the theory of Murdoch and Leng [8] is discussed.