КОЛЛОИДНЫЙ ЖУРНАЛ

Том XLI 1979 № 1

УДК 532.62:532.51

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ТОНКИХ ПЛЕНОК И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ СКОРОСТИ УТОНЧЕНИЯ ПЛЕНОК С НЕДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

И. Б. Иванов, Д. Ст. Димитров, Б. П. Радоев

С помощью развития уравнений Навье — Стокса и уравнений конвективной диффузии по малым параметрам получена система дифференциальных уравнений и граничных условий, описывающих вытекание жидкости из тесного зазора между двумя телами с деформируемыми поверхностями в присутствии ПАВ. Эти дифференциальные уравнения дают в виде первого приближения классическую теорию смазки. Возможности метода иллюстрированы решением задачи утончения жидкого (пенного) фильма в газовой фазе.

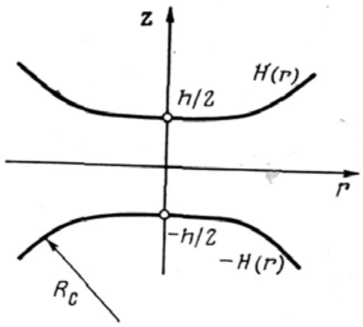
Практически все работы по гидродинамической теории микроскопических тонких пленок основаны на приближении теории смазки [1]. При малых концентрациях ПАВ, однако, поверхности свободных пленок имеют очень большую подвижность [2], и это приближение плохо выполняется, а в отсутствие ПАВ оно вообще теряет смысл. Такая же проблема возникает и в теории эмульсионных пленок [3]. В то же время применение полных уравнений Навье — Стокса к гидродинамике пленок связано с непреодолимыми математическими затруднениями. Поэтому в настоящей работе выведена система дифференциальных уравнений (и краевых условий), которая, будучи гораздо проще уравнений Навье — Стокса, свободна от недостатков уравнений теории смазки. Мы сформулируем эти уравнения для пленки с деформируемыми поверхностями, так как в такой формулировке их можно применять для решения всех задач осесимметричного вытекания пленок. В работе [4] эти уравнения использованы для исследования влияния тангенциальной подвижности поверхностей деформируемой пленки на ее скорость утончения, а в [5] — для вывода дисперсионного условия капиллярных волн. В качестве иллюстрации приложения этих уравнений здесь приведены без выкладок только результаты, к которым приводит их решение для пленок с недеформируемыми поверхностями.

Метод решения в некоторых отношениях похож на уже использованный в работе [2].

Для упрощения записи будем рассматривать пленку, образованную между двумя одинаковыми пузырьками (рисунок), и будем записывать краевые условия только для верхней поверхности. При наличии узкого зазора между двумя телами с искривленными поверхностями основной вклад в силу трения дают только области, находящиеся в непосредственной близости от места максимального сближения двух тел. Это позволяет ввести некоторый эффективный «радиус пленки» R_f и пренебречь течением при $r>R_f$. Если $H_f=H(R_f)$, пленку можно характеризовать параметром анизодиаметричности $\varepsilon=(H_f/R_f)^2$. Следует отметить, что несмотря на некоторую неопределенность «радиуса пленки», это не имеет значения для решения, так как H_f и R_f в конечные результаты не входят. Введем безразмерные переменные

$$\widetilde{z}=z/H_f,\ \widetilde{r}=r/R_f,\ \widetilde{H}=H/H_f,\ \widetilde{v}_z=v_z/V_f;\ \widetilde{v}_r=v_r\sqrt{\varepsilon}/V_f \tag{1}$$
$$\widetilde{t}=tV_f/H_f,\ \widetilde{p}=p/p_f,\ \widetilde{p}_{nn}=p_{nn}/p_f,\ \widetilde{p}_{n\tau}=p_{n\tau}/p_f\sqrt{\varepsilon}$$

где v_r и v_z — компоненты скорости, t — время, p — давление, p_{nn} и $p_{n\tau}$ — нормальная и касательная к поверхности пузырька составляющая тензора напряжений, V_f и p_f — характерные значения скорости утончения и давления, $p_f=\mu R_f^2 V_f/H_f^3$, μ — динамическая вязкость. Запишем $\widetilde{v}_r$, $\widetilde{v}_z$ и $\widetilde{p}$ в виде рядов по степеням ε и подставим в приближенную форму



Поперечное сечение жидкой пленки между двумя одинаковыми пузырьками, расположенными симметрично по отношению к плоскости $z=0$ r и z — цилиндрические координаты системы, R_c — радиус пузырьков, h — толщина пленки по оси симметрии z (при $r=0$), $\pm H(r)$, уравнения образовательной поверхности верхнего и нижнего пузырька вблизи оси симметрии

уравнений Навье — Стокса, справедливую для малых чисел Рейнольдса при осевой симметрии для квазистационарного процесса. То же самое сделаем с краевым условием (при $\widetilde{z}=\widetilde{H}$) $\widetilde{v}_z=\partial\widetilde{H}/\partial\widetilde{t}+\widetilde{v}_r(\partial\widetilde{H}/\partial\widetilde{r})$ и с выражениями для $\widetilde{p}_{nn}$ и $\widetilde{p}_{n\tau}$ (выразив их предварительно через p_{rr}, p_{rz} и p_{zz}) и для силы F, прижимающей пузырьки друг к другу

$$\widetilde{F}=\int\limits_0^1(-\ \widetilde{p}_{nn}+\varepsilon\widetilde{p}_{n\tau}\partial\widetilde{H}/\partial\widetilde{r})\,d\widetilde{r}^2\ \text{ при }\ \widetilde{z}=\widetilde{H} \tag{2}$$

где $\widetilde{F}=F/\pi R_f^2 p_f$. Ограничиваясь только слагаемыми, линейными по ε, получим систему дифференциальных уравнений и краевых условий, которая для нулевого приближения имеет вид *

$$\text{а)}\ \partial\widetilde{p}^{(0)}/\partial\widetilde{r}=\partial^2\widetilde{v}_r/\partial\widetilde{z}^2;\ \text{б)}\ \partial\widetilde{p}^{(0)}/\partial\widetilde{z}=0;\ \text{в)}\ \widetilde{\nabla}_r\widetilde{v}_r^{(0)}+\partial\widetilde{v}_z^{(0)}/\partial\widetilde{z}=0 \tag{3}$$

$$\text{а)}\ \widetilde{v}_z^{(0)}=\frac{\partial\widetilde{H}^{(0)}}{\partial\widetilde{t}}+\widetilde{v}_r^{(0)}\frac{\partial\widetilde{H}^{(0)}}{\partial\widetilde{r}},\ \text{б)}\ \widetilde{p}_{nn}^{(0)}=-\widetilde{p}^{(0)}=\widetilde{p}_{nn(s)}^{(0)}$$
$$\text{в)}\ \widetilde{p}_{n\tau}^{(0)}=\partial\widetilde{v}_r^{(0)}/\partial\widetilde{z}=\widetilde{p}_{n\tau(s)}^{(0)},\ \text{г)}\ \widetilde{F}^{(0)}=\int\limits_0^1\widetilde{p}^{(0)}d\widetilde{r}^2 \tag{4}$$

а для первого приближения

$$\text{а)}\ \partial\widetilde{p}^{(1)}/\partial\widetilde{r}=\partial^2\widetilde{v}_r^{(1)}/\partial\widetilde{z}^2+\partial(\widetilde{\nabla}_r\widetilde{v}_r^{(0)})/\partial\widetilde{r} \tag{5}$$
$$\text{б)}\ \partial\widetilde{p}^{(1)}/\partial\widetilde{z}=\partial^2\widetilde{v}_z^{(0)}/\partial\widetilde{z}^2,\ \text{в)}\ \widetilde{\nabla}_r\widetilde{v}_r+\partial\widetilde{v}_z/\partial\widetilde{z}=0$$

$$\text{а)}\ \widetilde{v}_z^{(1)}=\frac{\partial\widetilde{H}^{(1)}}{\partial t}+\widetilde{v}_r^{(0)}\frac{\partial\widetilde{H}^{(1)}}{\partial\widetilde{r}}+\widetilde{v}_r^{(1)}\frac{\partial\widetilde{H}^{(0)}}{\partial\widetilde{r}}$$
$$\text{б)}\ \widetilde{p}_{nn}^{(1)}=-\widetilde{p}^{(1)}+2\partial\widetilde{v}_z^{(0)}/\partial\widetilde{z}=\widetilde{p}_{nn(s)}^{(1)} \tag{6}$$

* При нестационарном процессе в (3) и (5) надо учесть производные скорости по времени.

$$\text{в) } \widetilde{p}^{(1)}_{n\tau} = -2\left(\frac{\partial \widetilde{H}^{(0)}}{\partial \widetilde{r}}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{H}'^{(0)}}{\partial \widetilde{r}}\frac{\partial \widetilde{v}^{(0)}_r}{\partial \widetilde{z}} + 2\frac{\partial \widetilde{v}^{(0)}_r}{\partial \widetilde{r}} + \frac{\widetilde{v}^{(0)}_r}{\widetilde{r}}\right) + \\ + \frac{\partial \widetilde{v}^{(1)}_r}{\partial \widetilde{z}} + \frac{\partial \widetilde{v}^{(0)}_z}{\partial \widetilde{r}} = \widetilde{p}^{(1)}_{n\tau(s)}$$

$$\text{г) } \widetilde{F}^{(1)} = \int\limits_0^1 \left(\widetilde{p}^{(1)} - 2\frac{\partial \widetilde{v}^{(0)}_z}{\partial \widetilde{z}} + \frac{\partial \widetilde{v}^{(0)}_r}{\partial \widetilde{z}}\frac{\partial \widetilde{H}^{(0)}}{\partial \widetilde{r}}\right) d\widetilde{r}^2$$

Здесь $\nabla_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r$, в (4) и (6) $\tilde{z} = \widetilde{H}^{(0)}$, а $p_{nn(s)}$ и $p_{n\tau(s)}$ — скачки p_{nn} и $p_{n\tau}$ на поверхности пузырька *. К этим уравнениям надо присоединить условие затухания течения по «периметру пленки»

$$p = 0 \text{ при } r = R_f \tag{7}$$

где давление неподвижной жидкости мы приняли равным нулю. Уравнения (3) являются классическими уравнениями теории смазки, а (4) — краевые условия в том же приближении. Назовем систему уравнений (3) — (6), в которой учитываются и первые поправки к приближению теории смазки, обобщенными уравнениями тонкой пленки.

Из самого способа вывода уравнений (3) — (6) видно, что получаемые из них результаты представляют внутренние решения, справедливые только в случаях, когда течением в областях, удаленных от оси симметрии, можно пренебречь [6]. Так как течение тормозится поверхностями пленки, можно ожидать, что уравнения теории смазки (3), (4) будут справедливы для свободных пленок только при малых поверхностных скоростях. При больших поверхностных скоростях ощутимый вклад в силу трения будут вносить более удаленные области и поэтому следует учитывать и первую поправку (см. уравнения (5), (6)).

Рассмотрим сначала недеформируемые пленки из чистой жидкости. В этом случае условие для p_{nn} следует исключить, так как форма поверхности задана, а $p_{n\tau(s)} = 0$. Как для пленки, образованной при сближении двух одинаковых недеформируемых сферических пузырьков, так и для плоскопараллельной пленки радиуса R и толщины h, $V_f \equiv V = -\partial(2H)/\partial t = -\partial h/\partial t$. Поэтому в (4а) $\partial \widetilde{H}^{(0)}/\partial \tilde{t} = -1/2$, а в (6а) $\partial \widetilde{H}^{(1)}/\partial \tilde{t} = 0$.

Для сферических пузырьков значение $H_f = H(R_f)$ можно определить из уравнения поверхности. Оказывается, что при $h \ll R_c$ для того, чтобы $\varepsilon = (H_f/R_f)^2 \ll 1$, необходимо иметь $(h/R_f)^2 \ll 1$ и $(R_f/R_c)^2 \ll 1$. Поэтому удобно положить $H_f \approx R_f^2/2R_c$ и $\varepsilon = (R_f/2R_c)^2$. Тогда $\widetilde{H}^{(0)} = \alpha_h + \tilde{r}^2$, где $\alpha_h = 2R_c h/R_f^2$ и $\widetilde{H}^{(1)} = \tilde{r}^4$. Решение (3) для этого случая дает

$$\text{а) } \widetilde{v}^{(0)}_r = \widetilde{r}/2\widetilde{H}^{(0)} \quad \text{б) } \widetilde{v}^{(0)}_z = -\alpha_h \widetilde{z}/(\widetilde{H}^{(0)})^2; \quad \text{в) } \partial \widetilde{p}^{(0)}/\partial \widetilde{r} = 0 \tag{8}$$

Из (8в) и (7) следует, что $\tilde{p}^{(0)} = 0$, так что нулевое приближение не дает вклада в силу трения. Подставляя (8) в (5), (6), получаем $\tilde{p}^{(1)} = 1/\widetilde{H}^{(0)}(\tilde{r}) - 1/\widetilde{H}^{(0)}(1)$. При очень малых толщинах ($h \ll R_c$) $\alpha_h \ll 1$ и из (6г) окончательно находим [7]

$$F = 2\pi\mu R_c V \ln(R_c/h) \tag{9}$$

где мы пренебрегли величинами порядка $\ln \varepsilon$.

Задача об уточнении плоскопараллельной пленки решается тем же способом, только в этом случае $\varepsilon = (h/R)^2$. Решение дает $\tilde{v}_r^{(0)} = \tilde{r}/2$,

---

* Явные выражения для $p_{nn(s)}$ и $p_{n\tau(s)}$ определяются свойствами поверхностей. Ввиду того что здесь будем проводить конкретные расчеты только для недеформируемых поверхностей, в дальнейшем выпишем уравнение только для $p_{n\tau(s)}$ (см. (15)).

$\tilde{v}_z^{(0)} = -\tilde{z}$ и $\tilde{p}^{(0)} = \tilde{p}^{(1)} = 0$. Поэтому из (6г) получаем

$$F = 2\pi\mu V R^2/h \tag{10}$$

Если бы эта задача решалась только на основании уравнений теории смазки (3), (4), то мы получили бы $F=0$.

В реальных системах всегда присутствуют ПАВ, которые даже в ничтожных концентрациях изменяют тангенциальную скорость на поверхности пузырьков и тем самым сказываются на уравнениях движения (в основном через (4в), (6в). Для решения (3)—(6) при наличии ПАВ в дальнейшем воспользуемся моделью плоскопараллельной пленки. Хотя эта модель вносит в решение некоторую внутреннюю несогласованность (нельзя удовлетворить (4б), (6б)), она позволяет правильно учесть влияние ПАВ на скорость ($V_{\text{деф}}$) утончения деформируемой пленки. Действительно, в [8] было показано, что скорость утончения $V^{\circ}_{\text{деф}}$ деформируемой пленки с заторможенными поверхностями при малых толщинах и радиусах пузырьков практически совпадает с рейнольдсовской скоростью V_{Re} для плоскопараллельной пленки (см. 16б)), если в уравнение для $V^{0}_{\text{деф}}$ ввести равновесный радиус R_e пленки *. Кроме того, оказалось [4], [9б], что при незаторможенных поверхностях $V_{\text{деф}}/V^{0}_{\text{деф}} \equiv V/V_{\text{Re}}$ (для V/V_{Re} см. (16) при $\varepsilon=0$), т. е. модель плоскопараллельной пленки позволяет точно вычислить изменение скорости утончения по сравнению с ее значением для системы с заторможенными поверхностями.

Для того чтобы учесть первые поправки в уравнениях движения (5), (6), в уравнениях, описывающих распределение ПАВ (когда скорость его подачи на поверхность лимитируется диффузией), надо сохранить вторые поправки по ε (слагаемые с ε^2). Так как это сильно усложняет уравнения, запишем их в нулевом и первом приближении для пленки с деформируемыми поверхностями, а во втором приближении — только для плоскопараллельной пленки **. Самыми существенными из этих уравнений являются уравнение конвективной диффузии и закон сохранения количества ПАВ (см. уравнения (8, 7) и (69), (7) в [11]).

Разлагая все зависимые переменные в этих уравнениях в ряды по степеням ε, для случая квазистационарного массопереноса при малых числах Пекле получаем в нулевом приближении

$$\begin{aligned} &\text{а) } \partial^2\tilde{c}^{(0)}/\partial\tilde{z}^2 = 0 \\ &\text{б) } \partial\tilde{c}^{(0)}/\partial\tilde{z} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

в первом приближении

$$\begin{aligned} &\text{а) } \frac{\partial^2\tilde{c}^{(1)}}{\partial\tilde{z}^2} + \tilde{\Delta}_r\tilde{c}^{(0)} = 0 \\ &\text{б) } \tilde{\nabla}_r\tilde{v}_r^{(0)} + \beta_{D_s}\tilde{\Delta}_r\tilde{c}^{(0)} = \beta_D\left(\frac{\partial\tilde{c}^{(1)}}{\partial\tilde{z}} - \frac{\partial\tilde{c}^{(0)}}{\partial\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{H}^{(0)}}{\partial\tilde{r}}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

---

* Радиус пленки, образованной между двумя пузырьками A и B с радиусами R_c^A и R_c^B и поверхностными натяжениями σ^A и σ^B вычисляется из уравнения [10] $R_e^2 = F\bar{R}_c/2\pi\bar{\sigma}$; $\bar{R}_c = 2R_c^A R_c^B/(R_c^A + R_c^B)$; $\bar{\sigma} = 2\sigma^A\sigma^B/(\sigma^A + \sigma^B)$, которое является обобщением известного уравнения Дерягина — Кусакова [10] и путем соответствующего выбора $R_c^{A,B}$ и $\sigma^{A,B}$ позволяет получить все возможные предельные случаи.

** При формулировке уравнений распределения ПАВ и соответствующих краевых условий будем следовать в общих чертах процедуре Левича [11], хотя запишем их в более общем виде.

и во втором приближении (для плоскопараллельной пленки)

$$\text{а) } \partial^2\tilde{c}^{(2)}/\partial\tilde{z}^2 + \tilde{\Delta}_r\tilde{c}^{(1)} = 0$$
$$\text{б) } \tilde{\nabla}_r\tilde{v}_r^{(1)} + \beta_{D_s}\tilde{\Delta}_r\tilde{c}^{(1)} = \beta_D\partial\tilde{c}^{(2)}/\partial\tilde{z} \qquad (13)$$

Здесь

$$\beta_D = -\frac{D\mu}{\Gamma_0\,(\partial\sigma/\partial c)_0}, \quad \beta_{D_s} = -\frac{D_s\mu}{\Gamma_0 H_f\,(\partial\sigma/\partial\Gamma)_0}, \quad \Delta_r = \nabla_r\frac{\partial}{\partial r} \qquad (14)$$

σ — поверхностное натяжение, Γ и c — поверхностная и объемная концентрации ПАВ (нижний индекс нуль обозначает равновесное значение), D и D_s — коэффициенты объемной и поверхностной диффузии, $\tau = c/c_f$, а $c_f = p_f H_f/(\partial\sigma/\partial c)_0$; уравнения (11б) и (12б) справедливы при $\tilde{z} = \tilde{H}^{(0)}$, а (13б) — при $\tilde{z} = 1/2$. В законе сохранения ПАВ было использовано допущение, что $\Delta_r\Gamma = (\partial\Gamma/\partial c)_0\Delta c$ [11]. К этим уравнениям надо присоединить краевое условие $c = c_0$ при $r = R_f$ и выражение для $\tilde{p}_{n\tau(s)}$ (см. (2в)):

$$\tilde{p}_{n\tau(s)} = \partial\tilde{c}/\partial\tilde{r} + \beta_{\mu_s}\partial(\tilde{\nabla}_r\tilde{v}_r)/\partial\tilde{r} \text{ при } \tilde{z} = \tilde{H}^{(0)} \qquad (15)$$

где $\beta_{\mu_s} = \mu_s H_f/\mu R_f^2$, а под поверхностной вязкостью μ_s следует подразумевать сумму первого и второго коэффициентов поверхностной вязкости. Так как $\tilde{p}_{n\tau(s)}$ от ε не зависит, то выражения для $\tilde{p}^{(0)}_{n\tau(s)}$, $\tilde{p}^{(1)}_{n\tau(s)}$ и $\tilde{p}^{(2)}_{n\tau(s)}$ совпадают с (15), если туда подставить соответствующие приближения для $\tilde{c}$ и $\tilde{v}_r$. Для плоскопараллельной пленки при всех разумных значениях μ_s параметр $\beta_{\mu_s} \ll 1$ и этим членом в (15) можно пренебречь. Совместное решение уравнений (3) — (7), (11) — (15) приводит к следующему выражению для скорости утончения V плоскопараллельной пленки толщины h и радиуса R:

$$\text{а) } \frac{V}{V_{\mathrm{Re}}} = \frac{1 + 3\,(\beta_D + 2\beta_{D_s})}{1 + 4\varepsilon\,(\beta_D + \beta_{D_s})}$$
$$\text{б) } V_{\mathrm{Re}} = 2Fh^3/3\pi R^4\mu \qquad (16)$$

Здесь V_{Re} — скорость, с которой утончалась бы пленка, образованная между двумя параллельными твердыми дисками [12]. Движущую силу F можно выразить через капиллярное давление пузырьков $P_c (\approx 2\sigma/R_c)$ и расклинивающее давление пленки Π [13, 7] $F = \pi R^2 (P_c - \Pi)$. Так как $\varepsilon \ll 1$, член с ε в знаменателе (16а), учитывающий отклонения от приближения теории смазки, может стать существенным только при $c_0 \to 0$, когда $\beta_D + 2\beta_D \gg 1$. Поэтому при выводе (16а) была использована аппроксимация $1 + \varepsilon + (\beta_D + 2\beta_{D_s})\varepsilon \approx 1 + (\beta_D + 2\beta_{D_s})\varepsilon$. При $c_0 \to 0$, когда β_D, $\beta_{D_s} \to \infty$, из (16) следует (10), а при $\varepsilon \to 0$ получаем [2]: $V/V_{\mathrm{Re}} = 1 + 3(\beta_D + 2\beta_{D_s})$. В том же приближении для смачивающей пленки находим $V/V_{\mathrm{Re}} = (1 + 4\beta_D + 8\beta_{D_s})/(1 + \beta_D + 2\beta_{D_s})$.

При мылых концентрациях ПАВ существенно начинает сказываться и конвективный массоперенос внутри пленки. К сожалению, нам удалось решить эту задачу только в приближении теории смазки. Тогда в уравнении конвективной диффузии следует сохранить слагаемые, пропорциональные числу Пекле: $\mathrm{Pe} = Vh/D$. Так как значения $\mathrm{Pe} > 1$ маловероятны, можно ограничиться случаем $\varepsilon \ll 1$, $\mathrm{Pe} \ll \varepsilon$ и искать решение, разлагая c в ряд по степеням ε, Pe и Pe/ε. Если ограничиться линейными членами в этом ряду, получим для скорости утончения

$$\frac{V}{V_{\mathrm{Re}}} = [1 + 3(\beta_D + 2\beta_{D_s})]\left(1 + \frac{\beta_D}{4\varepsilon}\frac{hV_{\mathrm{Re}}}{D}\right) \tag{17}$$

Для случая адсорбционно-лимитируемой подачи ПАВ на поверхность уравнения движения (3) — (6) остаются без изменения, но распределение ПАВ описывается только законом его сохранения, который в размерных переменных имеет вид [11]

$$\Gamma_0 \nabla_r v_r - D_s \Delta_r \Gamma = -\alpha_A (\Gamma - \Gamma_0) \text{ при } z = h/2 \tag{18}$$

где α_A — скоростная константа процесса адсорбции [11]. Это уравнение решается при краевых условиях $\Gamma = \Gamma_0$ при $r = R$ и требований об отсутствии особенностей при $r = 0$. При вычислении $p_{n\tau(s)}$ (15) следует заменить на

$$p_{n\tau(s)} = \partial\sigma/\partial r + \mu_s \partial(\nabla_r v_r)/\partial r \text{ при } z = h/2 \tag{19}$$

Результат для V (в приближении теории смазки и $\mu_s = 0$) удобно записать в виде

$$V = -\frac{Fh^2\alpha_A}{2\pi R^2 \Gamma_0 (\partial\sigma/\partial\Gamma)_0} \frac{I_0(\beta_A R)}{I_2(\beta_A R)} \tag{20}$$

где

$$\beta_A^2 = -6\mu\alpha_A/\Gamma_0 h (\partial\sigma/\partial\Gamma)_0 (1 + 6\beta_{D_s}) \tag{21}$$

а I_0 и I_2 — бесселевы функции чисто мнимого аргумента соответственно нулевого и второго порядка. При $\beta_A R \ll 1$ уравнений (20), (21) дают $V/V_{\mathrm{Re}} = 1 + 6\beta_{D_s}$. Тот же результат получается из (16) при $\varepsilon \to 0$ и $\beta_D \ll \ll \beta_{D_s}$. Это означает, что при малом потоке ПАВ из объема пленки на ее поверхность механизм его подачи становится несущественным. Тогда основную роль играет поверхностная диффузия.

Ответ на вопрос о том, который из двух механизмов подачи ПАВ является лимитирующим скорость, можно получить, сравнивая максимальные значения адсорбционного $(j_A)_{\max} = -\alpha_A(\Gamma - \Gamma_0)$ и диффузионного $(j_D)_{\max} = -D(\partial c/\partial z)_{z=h/2}$ потоков ПАВ на поверхность при одной и той же движущей силе массопереноса. Так находим

$$K = \frac{(j_A)_{\max}}{(j_D)_{\max}} = \frac{\alpha_A h (\partial\Gamma/\partial_c)_0}{D\varepsilon} \tag{22}$$

Оценка показывает, что из-за наличия ε в знаменателе (22) в большинстве случаев $K \gg 1$, т. е. скорость массопередачи ПАВ на поверхность пленки в основном лимитируется объемной диффузией.

Софийский университет

Поступила в редакцию
6 июля 1977 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе.* Теоретическая гидродинамика, Физматгиз, М., 1963, т. 2.
2. *B. Radoev, E. Manev, I. Ivanov,* Kolloid-Z., *234*, 1037, 1969; *B. Radoev, D. Dimitrov, I. B. Ivanov.* Colloid Polymer Sci., 252, 50, 1974; *I. B. Ivanov, D. St. Dimitrov.* Colloid Polymer Sci., *252, 982*, 1974; *Chr. Vassilieff, E. Manev, I. B. Ivanov.* Colloid Polymer Sci., *254*, 99, 1976.
3. *I. B. Ivanov, T. Traikov.* Internat. J. Multiphase Flow, *2*, 397, 1976; *T. Traikov, E. Manev, I. B. Ivanov.* Internat. J. Multiphase Flow, *3*, 485, 1977; *T. Traikov, I. B. Ivanov.* Internat. J. Multiphase Flow, *3*, 477, 1977.
4. *И. Б. Иванов, Д. Ст. Димитров, Б. П. Радоев.* Докл. БАН, *30*, 151, 1977.
5. *Д. Ст. Димитров, Б. П. Радоев, И. Б. Иванов.* Докл. БАН, *30*, 78, 1977.
6. *R. C. Cox, H. Brenner.* Chem. Eng. Sci., *22*, 1753, 1967.

7. *Д. Ст. Димитров, Б. Радоев.* Докл. БАН, *29*, 1649, 1976.
8. *D. S. Dimitrov, I. B. Ivanov.* J. Colloid Interface Sci., *63*, No. 1, 166, 1978.
9. *Б. П. Радоев, И. Б. Иванов.* Год. Соф. унив., Хим. фак., *66*, 631, 1971/72.
10. *B. V. Derjaguin, M. Kussakov.* Acta Physiochem. USSR, *10*, 25, 1939.
11. *В. Г. Левич.* Физико-химическая гидродинамика, Физматгиз, М., 1959.
12. *O. Reynolds.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, *A177*, 157, 1886.
13. *A. Scheludko,* Advances Colloid Interface Sci. Rev., *1*, 391, 1969.

GENERALIZED EQUATIONS OF THIN FILMS HYDRODYNAMICS AND THEIR APPLICATION TO THE CALCULATIONS OF THE THINNING RATE OF FILMS WITH NON—DEFORMED SURFACES

I. B. Ivanov, D. S. Dimitrov, B. P. Radoyev

Summary

By means of developing Navier-Stokes equations and convection diffusion equations, a system has been derived of differential equations and boundary conditions governing a liquid outflow from a narrow gap between two deformed surfaces in presence of surfactants. These differential equations present, as a first approximation, a classic lubrication theory. The potential of the method is illustrated by solving the problem of a liquid (foam) film thinning in a gas phase.